TITLE:
次元列で決まる多元環について(環の表現とDuality)

AUTHOR(S):
佐藤, 眞久

CITATION:
佐藤, 眞久. 次元列で決まる多元環について(環の表現とDuality). 数理解析研究所講究録 1987, 628: 27-41

ISSUE DATE:
1987-06

URL:
http://hdl.handle.net/2433/100002

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
628 巻 1987 年 27-41

次元列で決まる多元環について

山梨大学教育学部　佐藤眞久 (Masahisa Sato)

第1章　序文

近年の多元環論及びその表現論の発展にはめざましいものがあり、特に有限表現型の多元環については多くの研究者によってその構造を決定する多大の成果が得られ、その全容をまさに現わさんとしていると信じられている。その中で残された大きな問題として、次元列（環の組成列中に現われる単純剰余加群の個数といってもよい）で決まる多元環の分類の問題がある。最初に設定を明らかにしておこう。（詳しい定義および解説については山形氏の報告集[Y]を参照されたい。）

多元環とは代数閉体 K 上の有限次元の環をいう。更に、基本的(Basic)、即ち　$1=e_1+\cdots+e_n$ を原始巾等元への分解としたとき各巾等元は非同型とする。右加群 M_R において M の次元列 $\underline{\dim}_R M$ とはベクトル $(\dim_K Me_i)_i$ を意味する。但し、$\dim_K$ は K 上のベクトル空間としての次元である。

ここでは次の条件(*)を満たす多元環の性質を種々の例を通

して述べてみたい。詳しい証明は佐藤[S]を参照されたい。

(*) 次元列が一致する直既約加群は同型である。

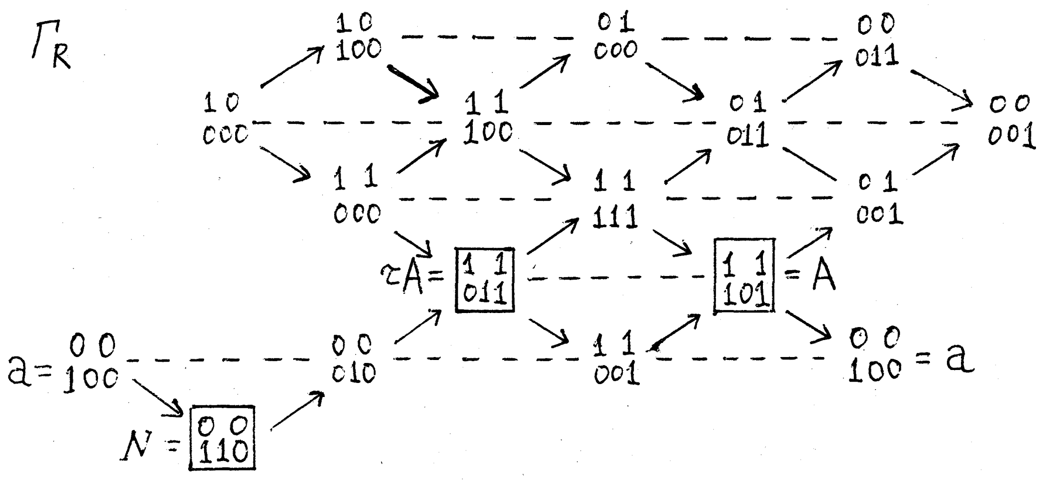
第2章 現況と方法論

(*)を満たす代表的な例はGabriel [Bo]による単連結多元環である。更に、Happel-Ringel[H]によってA-Rグラフ(Auslander-Reiten Quiver)がサイクル(oriented Cycle)を持たねば(*)が成立する事が証明されている。これらの一般化として、Auslander-Reiten[A]がA-Rグラフが短鎖(Short Chain)を持たねば(*)が成立する事を示した。ここで短鎖とは直既約加群の零でない準同型の鎖
$A \to B \to \tau A$である。(τはA-RグラフのTranslation。)
まず次の例を見てもらいたい。Q_Rは環の有向グラフ(Quiver)
Γ_RはそのA-Rグラフの記号である。

Q_R

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr] \arrow[d, "\alpha"'] & & 5 \arrow[d] \\ 2 \arrow[r, "\beta"'] & 3 \arrow[r, "\gamma"'] & 4 \end{tikzcd} \qquad \beta\alpha = \gamma\beta = 0$$

Γ_R

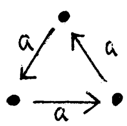


Γ_Rには短鎖($A \to N \to \tau A$)およびサイクル(NからN)があるが、

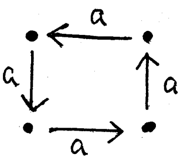
(*)は満たしている。またQ_RにサイクルがないにもかかわらずΓ_Rにはそれがある。Γ_Rの条件による特徴付けは、一見簡単に見えてもいたって複雑なものである。「多元環の研究は加群の圏を考察する事である」という研究上の深い認識が哲学となっているが、それはその方法論において意味をなすのであり、結果として得られるものは環としての性質を特徴付け出来るものであるべきである。Γ_Rを既知のものとすれば、次元列は簡単にわかってしまい問題自身あまり意味をなさない。

以後の定理等の意味する所の理解を容易にする為、次の環は(*)を満たすか否か調べてみてほしい。

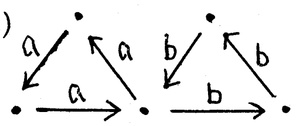
(1) $a \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{\ b\ } \bullet \circlearrowright c$　$cb = ba = c^n = a^m = 0$　(n, mは自然数)

(2) 

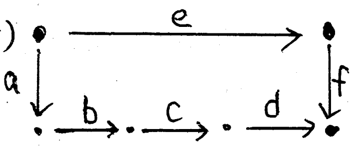
① $a^2 = 0$
② $a^3 = 0$　の各場合
③ $a^4 = 0$

(3) 

関係式は(2)に同じ

(4) 

$a^2 = b^2 = 0$
$ab = ba = 0$

(5) 

(1) $dcb = 0$, $ba = 0$
(2) $cba = 0$

第3章　次元的考察

Brauer-Thrall 予想(定理と呼ぶべきかもしれない)2より、無限表現型の多元環Rには、$\dim_K M \leqq n$ なる直既約加群が無限個存在するような自然数nがあるので、ディリクレの原理とあわせて、次の定理を得る。

定理1　(*)を満たす多元環は有限表現型である。

また次の結果は興味深い。

<u>定理2</u> (*)を満たす多元環Rの<u>非同型な</u>原始巾等元eとfについて $\dim_K eRf \leqq 1$ かつ $eRfRe=0$ である。

[注意] $\dim_K eRe$ は任意の次元を取ることが可能だが、$eRfRe=0$ より $eRe \cong K[X]/(X^n)$ となる。Rが短鎖をもたねば $\dim_K eRe \leqq 1$ である(Auslander-Reiten[A])ので短鎖はあまり良い概念ではない。

〈証明のポイント〉

① $\cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \circlearrowleft \beta$ なる形が出現すれば常に $\beta\alpha=0$ を示す。

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \cdot \arrow[loop right, "\beta"] \\ & \cdot \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

$\beta\alpha=\delta\gamma$ のような多元環をみればわかるように、$\beta\alpha$は周辺の事情でかなり左右され、これに関係なく一定の条件を満たす事を示すのが要点である。

② $eRfRe \neq 0$ なる e がある場合、$e_1=x \xrightarrow{\alpha_1} e_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} e_{n+1}=x$ なるサイクルで、$1 \leqq i<j<n$ または $1<i<j \leqq n$ なる任意の i,j に対し、 $\alpha_j \cdots \alpha_i \notin Rg \cdot \mathrm{rad}R \cdot gR$ がすべての原始巾等元 g に対し成立するようなものが存在する事を示す。 ■

例(定理1および定理2の結論をみたし(*)が不成立の例)

多元環Rを次の有向グラフと関係式で決まるものとする。

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha"] & 4 \arrow[d, "\varepsilon"] \\ 3 \arrow[ur, "\gamma"] & 2 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\tau"'] & 5 \arrow[ul, "\omega"'] \end{tikzcd}$$

$(\mathrm{rad}\,R)e_1(\mathrm{rad}\,R)=e_1\cdot(\mathrm{rad}\,R)e_1=0$

$\varepsilon\tau=\tau\alpha$, $\gamma\beta=\omega\tau$。

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & K \arrow[d, "1"] \\ K \arrow[ur, "0"] & K \arrow[l, "1"'] \arrow[r, "1"'] & K \arrow[ul, "0"'] \end{tikzcd}$$

および

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & K \arrow[d, "1"] \\ K \arrow[ur, "1"] & K \arrow[l, "1"'] \arrow[r, "1"'] & K \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd}$$

は

次元列が一致する２つの直既約表現である。

これを規制する原理は次の定理である。

<u>定理3</u>　Q_Rの一点xとxを始点とするサイクルαがあったとする。このとき、αに類似なサイクル $\beta: x=y_0 \xrightarrow{\beta_1} y_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_p} y_p=x$ $(p\geqq 2)$で$\beta_p\cdots\beta_2=0$ または $\beta_{p-1}\cdots\beta_1=0$ となるものがある。∎

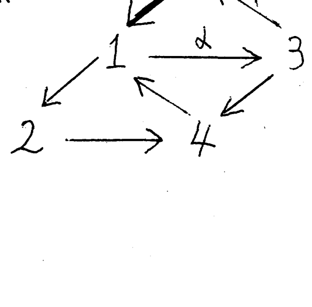
ここでいくつか定義を与えておこう。

[定義] ☆ サイクルが<u>極小</u>(minimal)とは、そのサイクル中の各点が異なるときをいう。

☆ 一点xを固定する。xを含む極小サイクルαとβに対し、$\alpha \underset{x}{\sim} \beta$ とは、αおよびβが共通な矢でxに向かうもの、あるいは、xから出るものを持っているときを表わす。また $\alpha \underset{x}{\sim} \gamma_1 \underset{x}{\sim} \cdots\cdots \gamma_n \underset{x}{\sim} \beta$ となる場合、αとβは<u>類似</u>(similar)と呼ばれる。

[注意] 上の定理ですべてのサイクルが$\beta_{p-1}\cdots\beta_1=0$か$\beta_p\cdots\beta_2=0$を満たすわけでない。次の例で$1\to2\to4$及び$2\to4\to1$は共に0でなく条件を満たすサイクルは$1\to3\to5\to1$で、上のサイクルとは1以外の共有点を有しない類似のサイクルである。

Q_R:



関係式

$(\mathrm{rad}\,R)e_1(\mathrm{rad}\,R)=0$, $\beta\alpha=0$,

可能な矩形は可換。

$\beta_{p-1}\cdots\beta_1 \neq 0$ かつ $\beta_p\cdots\beta_2 \neq 0$ なるサイクルが条件(*)から何の制約も受けていないのであろうか。次の例をみてみよう。

例 ((*)は成立しないが定理1から定理3までの結論をみたす例)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 3 \arrow[r, "\gamma"'] & 4 \arrow[ul, "\varepsilon"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \beta\alpha = \gamma\delta \\ \varepsilon\beta = \delta\varepsilon = 0 \end{array}$$

次の次元列の等しい非同型な直既約加群をもつ。

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & K \arrow[d, "1"] \\ K \arrow[r, "1"'] & K \arrow[ul, "0"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & K \arrow[d, "1"] \\ K \arrow[r, "1"] & K \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd}$$

次の定理は上のサイクルを規制するものであるが、条件は十分に昇華されていない。

サイクル $x = x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} x_n = x$ に対し

$F = \{ y \in Q_R \mid$ ある t に対し $x_t R y R x \neq 0 \} \cup \{ y \in Q_R \mid x R y \neq 0,\ y R x \neq 0$

かつ任意の t に対し $x_t R y R x = 0 \}$

$G = F - \{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ とおく。

<u>定理4</u>　$zRx_1 \neq 0$ なる $z\ (\neq x)$ は常に $xR\alpha_1 \neq 0$ を満たすサイクル $x = x_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} x_n = x$ があったとする。このとき (1) $yR\alpha_n\cdots\alpha_2 = 0$ あるいは (2) ある $z \notin F$ があり任意の $y \in G$ に対し $0 \neq yR\alpha_n\cdots\alpha_2 \in yRzRx_1$ の一方が成立する。

$\boxed{\text{第4章 真鎖}}$ 原始巾等元で非同型なeとfは $\dim_K eRf \leq 1$ を満たすので、Q_R でeからfへ至る道筋(Pass)は零かある特定の道筋を固定してその定数倍と一致する。2つの道筋よりなる図形は四角形の重ね合わせになっている。その場合、一方の道筋が零で他方が零でないとき、その零を与える関係式の道筋が(*)の成否に大きな関わりをもっている。(第2章の例参照)

例（定理1から定理4の結論を満たすが(*)を満たさない例）

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[d] \\
4 \arrow[rr] & & 5
\end{tikzcd} \qquad \beta\alpha = 0$$

次元列が等しい直既約加群として次のものがある。

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & K \arrow[r, "0"] & K \arrow[d, "1"'] \\
K \arrow[rr, "1"] & & K
\end{tikzcd} \qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1"] & K \arrow[r, "1"] & K \arrow[d, "1"'] \\
K \arrow[rr, "1"] & & K
\end{tikzcd}$$

零である方の道筋上の一点でこの道筋を分けると零でない2つの道筋にわかれる所が(*)を満たさない原因である。その際、考える図形は<u>真の直方形</u>である必要がある。上の例の図形は明らかに真の直方形であるが、直観的には明らかでも正しく定義するのは案外面倒である。ここでは、それを<u>真鎖</u>(True chain)と呼び次のように定義する。

[定義] 多元環Rは非同型な原始巾等元e, fに対し $\dim_K eRf \leq 1$ とする。Q_R の道筋

$$\begin{tikzcd}
z_0 & & z_1 & & \cdots & z_{t-1} & & z_t & \\
& x_0 \arrow[ul, dotted, "\gamma_0"'] \arrow[ur, dotted, "\beta_0"'] & & x_1 \arrow[ul, dotted, "\gamma_1"'] \arrow[ur, dotted, "\beta_1"'] & & & x_{t-1} \arrow[ul, dotted, "\gamma_{t-1}"'] \arrow[ur, dotted, "\beta_{t-1}"'] & & x_t \arrow[ul, dotted, "\gamma_t"']
\end{tikzcd}$$

が真鎖とは次の条件を満たすときをいう。

(1) 各 γ_p, β_p $(p \geqq 0)$ は零でない。

(2) $\gamma_p R \alpha_{p-1} = 0$ かつ $\beta_{p-1} R \alpha_p = 0$ $(p \geqq 1)$

(3) $z_p R u R \alpha_p \neq 0$ $(p \geqq 0)$ なる Q_R の点 u に対し、すべての k (下の場合を除く)に対し、$z_k R u = 0$。

除く場合は、$u = \alpha_p$ かつ $p < t$ のときは $k \neq p, p+1$、それ以外は $k \neq p$ かつ $(p, k) \neq (0, t)$ となるとき。

(4) $z_p R u R \alpha_{p-1} \neq 0$ $(p \geqq 1)$ なる Q_R の点 u に対し $z_k R u = 0$ がすべての k (但し、$u \neq \alpha_{p-1}$ のときは $k \neq p$)に対して成立。

上の双対の条件を満たすとき、双対真鎖(True co-chain)とよぶ。また真鎖(あるいは双対真鎖)が<u>閉じている</u>とは、$z_0 = \alpha_t$ かつ $\beta_0 R \alpha_t = 0$ を満たしているときをいう。

これに類似したもので鎖(Chain)がGabriel等[Ba]によって定義されているが、次の例からわかるように若干意味するところが違っている。

例　次の有向グラフと関係式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
5 \arrow[r] \arrow[d] & 6 & 1 \arrow[l] \arrow[d, "\alpha"] & \\
7 \arrow[rr, leftrightarrow, "\beta"] & & 3 \arrow[r] & 4 \\
& & 2 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\qquad \beta \cdot \alpha = 0
$$

この場合

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 7 & & 4 & & & 6 & \\
5 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[ur] & & & 1 \arrow[lll, "\alpha"'] \arrow[ur] & & 5 \arrow[ul] \\
 & & 2 \arrow[u] & & & & &
\end{tikzcd}$$

は閉鎖 $5\to 7\leftarrow 2\to 4\leftarrow 1\to 6\leftarrow 5$ をなしているが真鎖でない。閉真鎖とは

$$\begin{tikzcd}
5 \arrow[r] \arrow[d] & 6 & 1 \arrow[l] \arrow[d, "\alpha"] \\
7 \arrow[rr, "\beta"] & & 3
\end{tikzcd}$$

の部分を呼びたいのである。従って定義が複雑になってしまう。

真鎖に関する性質として次のものがある。

<u>定理5</u> Q_R の道筋 α: $y_0 \xrightarrow{\alpha_1} y_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{s+2}} y_{s+2}$ $(s \geqq 0)$ とする。$\alpha_a \cdots \alpha_1$ と $\alpha_{s+2} \cdots \alpha_{a+1}$ $(s+1 \geqq a \geqq 1)$ を各々左端，右端にもつ真鎖（または双対真鎖）で閉じたものがあれば $\alpha_{s+2} \cdots \alpha_1 \neq 0$

［注］誤解を招かないよう、次の例を上げる。上の真鎖は部分環(subcategory)的に扱えてはならないという事である。即ち、次の例で 6以外で生成される環として、

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
2 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 4 \arrow[d] \\
5 \arrow[r] & & 7 \arrow[r] & 8
\end{tikzcd}$$

が出現し、真鎖のようにみえるがこれは真鎖でない。なぜなら途中に6がありその間にバイパスが通っているからである。(*)の性質は部分環に伝わらず近傍の微妙な状況に大きく影響を受けてくる。これが問題を複雑にしているのである。

例　次の有向グラフと関係式で決まる多元環は(*)を満たす。

$$\begin{tikzcd}
 & 7 \arrow[dr] & \\
5 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\gamma"'] & 6 \arrow[r] & 8 \\
 & & 4 \arrow[u] \\
2 \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[r, dash, "\delta"] & 3 \arrow[uu, "\varepsilon"'] \arrow[r, dash] & 1 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\beta\alpha = \gamma\alpha = \varepsilon\delta = 0$

各矩形は可換。

道筋 $2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 8$ は零でなく $2 \to 5 \to 7 \to 8$ は零で5で切断すると $2 \to 5$ と $5 \to 7 \to 8$ と零でない2つの道筋に分断され、定理の結論に反するようにみえる。しかし、2から8への道筋には6を通るバイパスがあり、真鎖にならない。(あるいは真の四角形でないからと言ってもよい。)
従って定理5の対象にならないのである。

第5章　ループの解消

この章では Q_R にループ(自分自身へ向かう矢)のある多元環の考察がループのない多元環をこの多元環から構成することで、こちらにその考察が帰着できることを解説する。

その原理は、定理2とそれから導びかれる次の補題である。

補題　非同型な原始巾等元 e, f に対し、$\dim_K eRf \leqq 1$ とする。このとき各R-加群Mに対し次のことが成立する。

(1)　右eRe-加群として $M \cdot fRe \subset \mathrm{Soc}(Me)$。

(2)　右eRe-加群として $\mathrm{Rad}(Me)eRf = 0$。

ただし、Soc は Socle を Rad は Radical を意味する。

次にRからループを解消した多元環(ここでは、Replacing Algebra とよぶ)の構成をする。以下Rは有限表現型とする。

$1=e_0+e_1+\cdots+e_t$ を1の原始巾等元への分解として、$\dim_K e_iRe_j \leqq 1$ $(i\neq j)$ とする。また $e_0=e$ とおく。
$e(\mathrm{Rad}\,R/\mathrm{Rad}^2R)e\neq 0$, 即ち Q_R は点 e でループをもっていて、
$\{e\cdot(\mathrm{Rad}\,R)e\}^m\neq 0$ $(m\geqq 1)$ とする。

$R/ReR \cong [e_j R/ReR\, e_i]$ なる環同型があるので、$\dim_K e_iRe_j\leqq 1$ $(i\neq j)$ かつ $e_i R/ReR\, e_i \cong K[X_i]/(X_i^{n_i})$ (なぜなら R は有限表現型より R/ReR も同様で $e_i(R/ReR)e_i$ は、原始巾等元(R/ReRとしての)による準同型環と考えられ Uni-Serial より)より、R/ReR は環

$$\begin{bmatrix} K[X_1]/(X_1^{n_1}) & K & \cdots & K \\ K & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & K \\ K & \cdots & K & K[X_t]/(X_t^{n_t}) \end{bmatrix}$$

と同型である。

M, ${}^tN$ を $(t, m+1)$ 型の行列全体の部分K-ベクトル空間として次のように決める。(^{t} は転倒行列を示す)

$M=(K\cdot a_{ij})$, $N=(K\, b_{pq})$ $\quad 1\leqq i,q\leqq t$; $1\leqq j,p\leqq m+1$

として
$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (eRe_jRe_i\neq 0 \text{ のとき})\\ 0 & (\text{他のとき})\end{cases}, \quad b_{pq}=\begin{cases}1 & (e_qRe_pRe\neq 0 \text{ のとき})\\ 0 & (\text{他のとき})\end{cases}$$

また $M\cdot X_i = X_i\cdot N = 0$ $(i=1,\cdots,t)$ かつ $N\cdot M = M\cdot N = 0$

とする。これにより、自然にMは左-R/ReR 右-A_{m+1}-加群，
Nは左-A_{m+1} 右-R/ReR-加群と考えられる。ただし、A_{m+1}は
K上の$(m+1)$次下三角行列環とする。

そこで、Rの置換環を次の変形を何回か繰り返して得られる環とする。

$m=0$のとき　$\bar{R}(e,0) = R/ReR$

$m>0$のとき　$$\bar{R}(e,m) = \begin{bmatrix} R/ReR & M \\ N & A_{m+1} \end{bmatrix}$$

後者は R/ReR の自明拡大環（Trivial Extension）[F]と呼ばれるものである。

置換環(Replacing Algebra)の例を上げよう。

例　次の有向グラフと関係式で決まる多元環を考える。

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\beta"] & 4 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[loop above, "\delta"] & 5 \\ 1 \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & 3 \arrow[u, "\tau"] \end{tikzcd}$$

$\gamma\beta\alpha = \tau\varepsilon$,

$\delta^2 = \delta\beta = \gamma\delta = 0$.

$\bar{R}(4,0)$と$\bar{R}(4,1)$の有向グラフは次のようになる。

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\beta"] & 4 \arrow[r, "\gamma"] & 5 \\ 1 \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & 3 \arrow[u, "\tau"] \end{tikzcd}$$

$\gamma\beta\alpha = \tau\varepsilon$

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\beta"] & 4' & 4'' \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\gamma"] & 5 \\ 1 \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rrr, "\varepsilon"] & & & 3 \arrow[u, "\tau"] \end{tikzcd}$$

$\tau\varepsilon = 0$

先の定理5のループがある場合の扱いは、置換環におき直して定理5のそれと同様になる。それが次の定理6である。

<u>定理6</u> Rのいかなる置換環に対し定理5の主張が成立する。

最後に、ループのnilpotencyについて考察する。
次の例はループδが$\delta^2 \neq 0$であるが為に(*)をみたさない例である。

例 次の有向グラフと関係式で決まる多元環を考える。

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 3 \arrow[loop above, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"] & 2 \arrow[l, "\beta"'] \\ & 4 & \end{tikzcd} \qquad \delta^3 = \gamma\alpha = \gamma\beta = \delta\alpha = \delta\beta = \gamma\delta = 0$$

次元列の等しい非同型な直既約加群が次のように存在する。

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}"] & K\oplus K\oplus K \arrow[loop above, "{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}}"] \arrow[d, "{[1\ 1\ 0]}"] & K \arrow[l, "{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}"] \\ & K & \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} K \arrow[r] & K\oplus K\oplus K \arrow[loop above, "{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}}"] \arrow[d, "{[1\ 0\ 0]}"] & K \arrow[l, "{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

さらに $\delta^2 = 0$ の場合でも周辺の道筋の様子によってそれを規制する関係式が存在する。その例を次に示す。

例 次の有向グラフと関係式で決まる多元環を考える

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 3 \arrow[loop above, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"] & 2 \arrow[l, "\beta"'] \\ & 4 & \end{tikzcd} \qquad \delta^2 = \delta\alpha = \delta\beta = \gamma\delta = 0$$

次元列の等しい非同型な直既約加群として次のものがある。

$$\begin{tikzcd} & K \\ K \arrow[r, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"] & K\oplus K \arrow[loop above, "\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}"] \arrow[d, "{[0\ 1]}"'] & K \arrow[l, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"'] \\ & K \end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"] & K\oplus K \arrow[loop above, "\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}"] \arrow[d, "{[1\ 1]}"'] & K \arrow[l, "\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}"'] \\ & K \end{tikzcd}$$

これらを総合して次の定理をうる。

<u>定理7</u>　次のような道筋

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[d, dash, "b"] \\ x \arrow[r, dash, "a"] & z_0 \arrow[r, dash, "\alpha_1"] & z_1 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash, "\alpha_n"] & z_n \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

あるいは

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash, "a"] & z_0 \arrow[loop below, "\rho"] \arrow[r, dash, "\alpha_1"] & z_1 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash, "\alpha_n"] & z_n \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

で、線型部分 $z_0 \overset{\alpha_1}{—} \cdots \overset{\alpha_n}{—} z_n$ および $y \overset{b}{—} z_0 \overset{\alpha_1}{—} \cdots \overset{\alpha_n}{—} z_n$ が真鎖あるいは双対真鎖をなしているとする。このとき次が成立する。

(1)　$\gamma^2 = 0$。

(2)　z_n から矢 $z_n \overset{\varepsilon}{—} z_{n+1}$ が出ていて、その合成 $z_0 \overset{\alpha_1}{—} \cdots \overset{\alpha_n}{—} z_n \overset{\varepsilon}{—} z_{n+1}$ および $y \overset{b}{—} z_0 \overset{\alpha_1}{—} \cdots \overset{\alpha_n}{—} z_n \overset{\varepsilon}{—} z_{n+1}$ が真鎖あるいは双対真鎖になっているとすると、ε は α_n と同じ向きになっていて、$\varepsilon \cdots \alpha_p = 0$ あるいは $\alpha_p \cdots \alpha_n \varepsilon = 0$。(ただし合成できる向きのみで考えるものとする。)

記号 — は矢を表わし、→ または ← の一方を示している。

また $p = \max\{i \mid \alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_i$ は同じ向き$\}$ とする。

文献

[A] M. Auslander, I. Reiten : Modules determined by their composition factors, Illinois Journal of Math. 29, 280-301 (1985).

[Ba] R. Bautista, P. Gabriel, A.V.Roiter, L. Salmeron: Representation finite algebra and and multiplicative bases, Invention Math. 81, 217-285 (1985).

[Bo] K. Bongartz, P. Gabriel : Covering spaces in representation theory, Invention Math. 65, 331-378 (1982).

[F] M. Fossum, A. Griffith, I. Reiten : Trivial extension of abelian group, Lecture Notes in Mathematics 456, Springer Verlag, Berlin•Heidelberg•New York.

[H] D. Happel, C.M. Ringel : Tilted algebras, Trans. of A.M.S. 274, 399-443 (1982).

[S] M.Sato : On algebras over which every indecomposable module is determined by dimension type I, preprint

[Y] 山形邦夫 : 「多元環の表現論」シンポジュウ報告集 p1-p57 (1986)